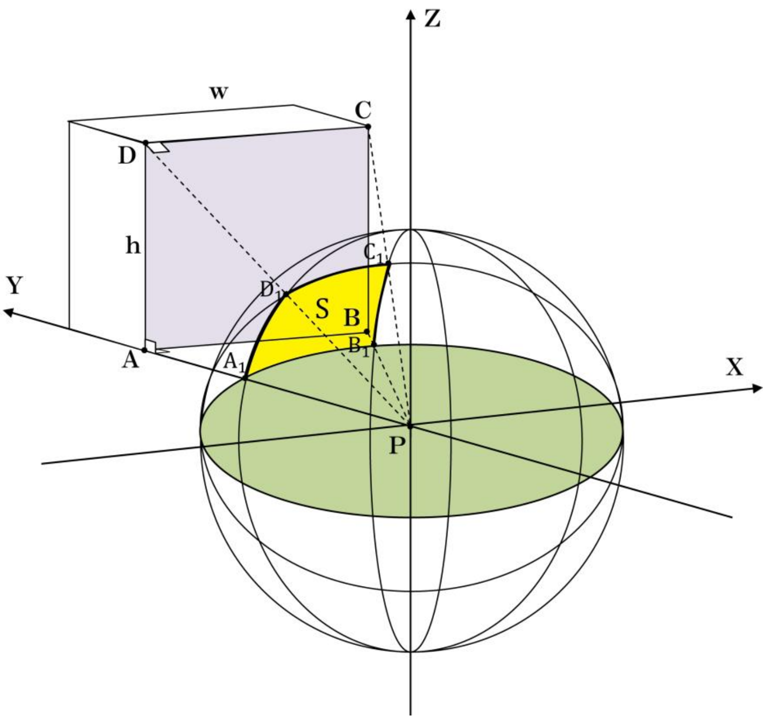
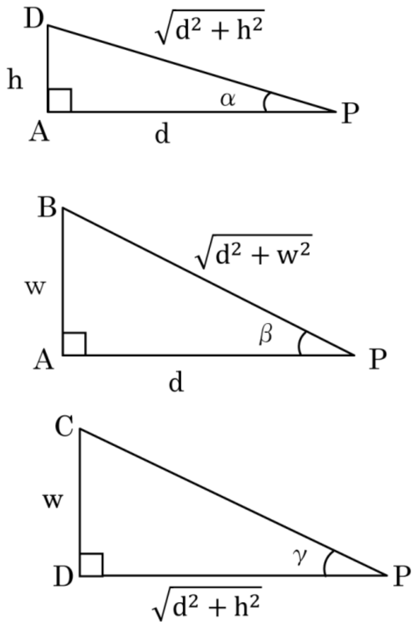
３Ｄ形態率の算定式は

$$3\mathrm{DRS} = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\frac{hw}{d\sqrt{d^2+h^2+w^2}}$$

で表わされる。

証明）





球面４角形$A_1B_1C_1D_1$の面積

$S = r^2(\angle D_1A_1B_1 + \angle A_1B_1C_1 + \angle B_1C_1D_1 + \angle C_1D_1A_1 - 2\pi)$

ここで

$\angle D_1A_1B_1 = \dfrac{\pi}{2}$、$\angle A_1B_1C_1 = \dfrac{\pi}{2}$、$\angle B_1C_1D_1 = \cos^{-1}(-\sin\alpha\sin\beta)$、$\angle C_1D_1A_1 = \dfrac{\pi}{2}$

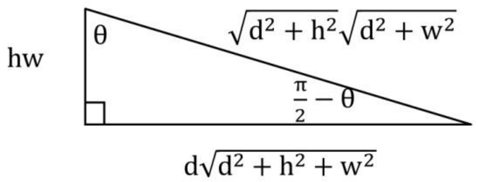
である。（【注】参照）

$$\therefore S = r^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\cos^{-1}(-\sin\alpha\sin\beta)+\frac{\pi}{2}-2\pi\right) = r^2\left(\cos^{-1}(-\sin\alpha\sin\beta)-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= r^2\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}(\sin\alpha\sin\beta)\right) = r^2\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\left(\frac{h}{\sqrt{d^2+h^2}}\frac{w}{\sqrt{d^2+w^2}}\right)\right)$$

$$= r^2\left(\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{hw}{\sqrt{d^2+h^2}\sqrt{d^2+w^2}}\right) = r^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = r^2\tan^{-1}\frac{hw}{d\sqrt{d^2+h^2+w^2}}$$

$$\therefore 3\mathrm{DRS} = \frac{\mathrm{S}}{2\pi r^2} = \frac{r^2\tan^{-1}\dfrac{hw}{d\sqrt{d^2+h^2+w^2}}}{2\pi r^2} = \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\frac{hw}{d\sqrt{d^2+h^2+w^2}}$$



証明おわり

【注】

４角形$A_1B_1C_1D_1$の４つの頂点の内角の求め方。

扇形A_1B_1Pの法線$V_{A_1B_1}$は大円A_1B_1の法線と同じである、法線ベクトルの 向きを２つのベクトル$\overrightarrow{PA_1}, \overrightarrow{PA_2}$,による右手系で定め$V_{A_1B_1}$と表わす。

同様に$V_{B_1C_1}$は大円B_1C_1の法線ベクトル、$V_{C_1D_1}$は大円C_1D_1の法線ベクトル、$V_{D_1A_1}$は大円D_1A_1の法線ベクトルと定める。

$V_{A_1B_1}$＝$(0,0,-1)$、$V_{B_1C_1}$＝$(\cos\beta,-\sin\beta,0)$、$V_{C_1D_1}$＝$(0,-\sin\alpha,\cos\alpha)$、$V_{D_1A_1}$＝$(-1,0,0)$、

が成り立つ。

$\angle D_1A_1B_1$の外角は$V_{A_1B_1}$と$V_{D_1A_1}$のなす角であるから

$$\cos(\pi-\angle D_1A_1B_1) = V_{D_1A_1}\cdot V_{A_1B_1}$$

$$\therefore \cos\angle D_1A_1B_1 = -V_{D_1A_1}\cdot V_{A_1B_1} = -(-1,0,0)(0,0,-1) = 0 \therefore \angle D_1A_1B_1 = \frac{\pi}{2}$$

同様に

$$\cos\angle A_1B_1C_1 = -V_{A_1B_1}V_{B_1C_1} = -(0,0,-1)(\cos\beta,-\sin\beta,0) = 0 \therefore \angle A_1B_1C_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\angle B_1C_1D_1 = -V_{B_1C_1}V_{C_1D_1} = -(\cos\beta,-\sin\beta,0)(0,-\sin\alpha,\cos\alpha) = -\sin\alpha\sin\beta$$

$$\therefore \angle B_1C_1D_1 = \cos^{-1}(-\sin\alpha\sin\beta)$$

$$\cos\angle C_1D_1A_1 = -V_{C_1D_1}V_{D_1A_1} = -(0,-\sin\alpha,\cos\alpha)(-1,0,0) = 0 \therefore \angle C_1D_1A_1 = \frac{\pi}{2}$$

注　終り）