和集合の面積

Ⅰ　和集合の個数公式

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$n(A\cup B\cup C)=n(A\cup B)+n(C)-n((A\cup B)\cap C)$

$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-n((A\cap C)\cup(B\cap C))$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)—\{n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap C\cap B\cap C)\}$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cup C)—n(A\cap C)-n(A\cap B)+n(A\cap B\cap C)$

$n(A\cup B\cup C\cup D)=n(A\cup B\cup C)+n(D)-n((A\cup B\cup C)\cap D)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cup C)—n(A\cap C)-n(A\cap B)+n(A\cap B\cap C)$

$+n(D)-n\big((A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)\big)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cup C)—n(A\cap C)-n(A\cap B)+n(A\cap B\cap C)$

$+n(D)-n(A\cup D)-n(B\cup D)-n(C\cup D)+n\big((A\cap D)\cap(B\cap D)\big)$

$+n\big((A\cap D)\cap(C\cap D)\big)+n\big((B\cap D)\cap(C\cap D)\big)$

$-n\big((A\cap D)\cap(B\cap D)\cap(C\cap D)\big)$

$=n(A)+n(B)+n(C)+n(D)-n(B\cup C)—n(A\cap C)-n(A\cap B)-n(A\cup D)$

$-n(B\cup D)-n(C\cup D)+n(A\cap B\cap C)+n(A\cap B\cap D)+n(A\cap C\cap D)$

$+n(B\cap C\cap D)-n(A\cap B\cap C\cap D)$

Ⅱ　自然数の展開集合

任意の自然数wを考える。自然数は常に２進数で表わせるから、自然数wは$w=2^{k_1-1}+2^{k_2-1}+\cdots+2^{k_m-1}$の形に表現できる。

$w=2^{k_1-1}+2^{k_2-1}+\cdots+2^{k_m-1}$から$m$個の自然数の集合$\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$への対応を@で表わす。また$w=2^{k_1-1}+2^{k_2-1}+\cdots+2^{k_m-1}$から$m$への対応を$\partial$で表わす。

$@w=@（2^{k_1-1}+2^{k_2-1}+\cdots+2^{k_m-1}）=\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$

また$\partial w=\partial（2^{k_1-1}+2^{k_2-1}+\cdots+2^{k_m-1}）=m$

自然数の集合Aに対して$@x=A$のときxをAのシンボル数と呼ぶことにする。またAを数xの展開集合と呼ぶことにする。

$x<2^{k-1}$　ならば　$@(x+2^{k-1})=@x\cup\{k\}$ が成り立つ。

＜例＞自然数5は$5=(101)=2^2+2^0=2^{3-1}+2^{1-1}$であるから

$@5=@(101)=@(2^2+2^0)＝@(2^{3-1}+2^{1-1})＝\{3,1\}$

$\partial 5=2$である。

従って数5 の展開集合は{1,3}である。また集合{1,3}のシンボル数は5 である。

$5<2^{4-1}$　だから　$@(5+2^{4-1})=@5\cup\{4\}＝\{1,3\}\cup\{4\}＝\{1,3,4\}$　が成り立つ。

＜例＞$@1=@(1)=@2^{1-1}=\{1\}$　$\therefore\ \partial 1=1$

$@2=@(10)=@2^{2-1}=\{2\} \quad \therefore \partial 2=1$

$@3=@(11)=@(2^{2-1}+2^{1-1})=\{1,2\} \quad \therefore \partial 3=2$

$@4=@(100)=@2^{3-1}=\{3\} \quad \therefore \partial 4=1$

$@5=@(101)=@(2^{3-1}+2^{1-1})=\{1,3\} \quad \therefore \partial 5=2$

$@6=@(110)=@(2^{3-1}+2^{2-1})=\{2,3\} \quad \therefore \partial 6=2$

$@7=@(111)=@(2^{3-1}+2^{2-1}+2^{1-1})=\{1,2,3\} \quad \therefore \partial 7=3$

$@8=@(1000)=@2^{4-1}=\{4\} \quad \therefore \partial 8=1$

$@9=@(1001)=@(2^{4-1}+2^{1-1})=\{1,4\} \quad \therefore \partial 9=2$

$@10=@(1010)=@(2^{4-1}+2^{2-1})=\{2,4\} \quad \therefore \partial 10=2$

$@11=@(1011)=@(2^{4-1}+2^{2-1}+2^{1-1})=\{1,2,4\} \quad \therefore \partial 11=3$

$@12=@(1100)=@(2^{4-1}+2^{3-1})=\{3,4\} \quad \therefore \partial 12=2$

$@13=@(1101)=@(2^{4-1}+2^{3-1}+2^{1-1})=\{1,3,4\} \quad \therefore \partial 13=3$

$@14=@(1110)=@(2^{4-1}+2^{3-1}+2^{2-1})=\{2,3,4\} \quad \therefore \partial 14=3$

$@15=@(1111)=@(2^{4-1}+2^{3-1}+2^{2-1}+2^{1-1})=\{1,2,3,4\} \quad \therefore \partial 15=4$

$@16=@(10000)=@2^{5-1}=\{5\} \quad \therefore \partial 16=1$

Ⅲ　和集合の個数公式(つづき)

展開集合を使った表現を考える。

$n(A_1 \cup A_2)=n(A_1)+n(A_2)-n(A_1 \cap A_2)$

$$=n\left(\bigcap_{k\in\{1\}} A_k\right)+n\left(\bigcap_{k\in\{2\}} A_k\right)-n\left(\bigcap_{k\in\{1,2\}} A_k\right)$$

$$= n\left(\bigcap_{k\in @(1)} A_k\right)+n\left(\bigcap_{k\in @(10)} A_k\right)-n\left(\bigcap_{k\in @(11)} A_k\right)$$

$$=-(-1)^1 n\left(\bigcap_{k\in @1} A_k\right)-(-1)^1 n\left(\bigcap_{k\in @2} A_k\right)-(-1)^2 n\left(\bigcap_{k\in @3} A_k\right)$$

$$=-(-1)^{\partial 1} n\left(\bigcap_{k\in @1} A_k\right)-(-1)^{\partial 2} n\left(\bigcap_{k\in @2} A_k\right)-(-1)^{\partial 3} n\left(\bigcap_{k\in @3} A_k\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{3}(-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k\in @i} A_k\right)=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{\partial i-1} n\left(\bigcap_{k\in @i} A_k\right)$$

$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

$=n(A_1)+n(A_2)+n(A_3)-n(A_2 \cup A_3)—n(A_1 \cap A_3)-n(A_1 \cap A_2)+n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$$= n\left(\bigcap_{k\in\{1\}} A_k\right) + n\left(\bigcap_{k\in\{2\}} A_k\right) + n\left(\bigcap_{k\in\{3\}} A_k\right) - n\left(\bigcap_{k\in\{2,3\}} A_k\right) - n\left(\bigcap_{k\in\{1,3\}} A_k\right) - n\left(\bigcap_{k\in\{1,2\}} A_k\right)$$

$$+ n\left(\bigcap_{k\in\{1,2,3\}} A_k\right)$$

$$= n\left(\bigcap_{k\in @(1)} A_k\right) + n\left(\bigcap_{k\in @(10)} A_k\right) + n\left(\bigcap_{k\in @(100)} A_k\right) - n\left(\bigcap_{k\in @(110)} A_k\right) - n\left(\bigcap_{k\in @(101)} A_k\right)$$

$$- n\left(\bigcap_{k\in @(11)} A_k\right) + n\left(\bigcap_{k\in @(111)} A_k\right)$$

$$= -(-1)^1 n\left(\bigcap_{k\in @1} A_k\right) - (-1)^1 n\left(\bigcap_{k\in @2} A_k\right) - (-1)^1 n\left(\bigcap_{k\in @4} A_k\right) - (-1)^2 n\left(\bigcap_{k\in @6} A_k\right) - (-1)^2 n\left(\bigcap_{k\in @5} A_k\right)$$

$$-(-1)^2 n\left(\bigcap_{k\in @3} A_k\right) - (-1)^3 n\left(\bigcap_{k\in @7} A_k\right)$$

$$= -(-1)^{\partial 1} n\left(\bigcap_{k\in @1} A_k\right) - (-1)^{\partial 2} n\left(\bigcap_{k\in @2} A_k\right) - (-1)^{\partial 4} n\left(\bigcap_{k\in @4} A_k\right) - (-1)^{\partial 6} n\left(\bigcap_{k @\in 6} A_k\right) - (-1)^{\partial 5} n\left(\bigcap_{k\in @5} A_k\right)$$

$$-(-1)^{\partial 3} n\left(\bigcap_{k\in @3} A_k\right) - (-1)^{\partial 7} n\left(\bigcap_{k\in @7} A_k\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{7} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k\in @i} A_k\right) = \sum_{i=1}^{7} (-1)^{\partial i - 1} n\left(\bigcap_{k\in @i} A_k\right)$$

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$$

$$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) - n(A_1 \cup A_2) \text{—} n(A_1 \cap A_3) - n(A_1 \cap A_4)$$

$$- n(A_2 \cup A_3) \text{—} n(A_2 \cap A_4) - n(A_3 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$+ n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$= n\left(\bigcap_{k\in\{1\}} A_k\right) + n\left(\bigcap_{k\in\{2\}} A_k\right) + n\left(\bigcap_{k\in\{3\}} A_k\right) + n\left(\bigcap_{k\in\{4\}} A_k\right) - n\left(\bigcap_{k\in\{1,2\}} A_k\right) - n\left(\bigcap_{k\in\{1,3\}} A_k\right)$$

$$-n\left(\bigcap_{k\in\{1,4\}} A_k\right) - n\left(\bigcap_{k\in\{2,3\}} A_k\right) - n\left(\bigcap_{k\in\{2,4\}} A_k\right) - n\left(\bigcap_{k\in\{3,4\}} A_k\right) + n\left(\bigcap_{k\in\{1,2,3\}} A_k\right)$$

$$+n\left(\bigcap_{k\in\{1,2,4\}} A_k\right)+n\left(\bigcap_{k\in\{1,3,4\}} A_k\right)+n\left(\bigcap_{k\in\{2,3,4\}} A_k\right)-n\left(\bigcap_{k\in\{1,2,3,4\}} A_k\right)$$

$$=n\left(\bigcap_{k\in@(1)} A_k\right)+n\left(\bigcap_{k\in@(10)} A_k\right)+n\left(\bigcap_{k\in@(100)} A_k\right)+n\left(\bigcap_{k\in@(1000)} A_k\right)-n\left(\bigcap_{k\in@(11)} A_k\right)$$

$$-n\left(\bigcap_{k\in@(101)} A_k\right)-n\left(\bigcap_{k\in@(1001)} A_k\right)-n\left(\bigcap_{k\in@(110)} A_k\right)-n\left(\bigcap_{k\in@(1010)} A_k\right)-n\left(\bigcap_{k\in@(1100)} A_k\right)$$

$$+n\left(\bigcap_{k\in@(111)} A_k\right)+n\left(\bigcap_{k\in@(1011)} A_k\right)+n\left(\bigcap_{k\in@(1101)} A_k\right)+n\left(\bigcap_{k\in@(1110)} A_k\right)$$

$$+n\left(\bigcap_{k\in@(1111)} A_k\right)$$

$$=(-1)^1 n\left(\bigcap_{k\in@1} A_k\right)-(-1)^1 n\left(\bigcap_{k\in@2} A_k\right)-(-1)^1 n\left(\bigcap_{k\in@4} A_k\right)-(-1)^1 n\left(\bigcap_{k\in@8} A_k\right)$$

$$-(-1)^2 n\left(\bigcap_{k\in@3} A_k\right)-(-1)^2 n\left(\bigcap_{k\in@5} A_k\right)-(-1)^2 n\left(\bigcap_{k\in@9} A_k\right)-(-1)^2 n\left(\bigcap_{k\in@6} A_k\right)$$

$$-(-1)^2 n\left(\bigcap_{k\in@10} A_k\right)-(-1)^2 n\left(\bigcap_{k\in@12} A_k\right)-(-1)^3 n\left(\bigcap_{k\in@7} A_k\right)-(-1)^2 n\left(\bigcap_{k\in@11} A_k\right)$$

$$-(-1)^3 n\left(\bigcap_{k\in@14} A_k\right)-(-1)^3 n\left(\bigcap_{k\in@13} A_k\right)-(-1)^4 n\left(\bigcap_{k\in@15} A_k\right)$$

$$=(-1)^{\partial 1} n\left(\bigcap_{k\in@1} A_k\right)-(-1)^{\partial 2} n\left(\bigcap_{k\in@2} A_k\right)-(-1)^{\partial 4} n\left(\bigcap_{k\in@4} A_k\right)-(-1)^{\partial 8} n\left(\bigcap_{k\in@8} A_k\right)$$

$$(-1)^{\partial 3} n\left(\bigcap_{k\in@3} A_k\right)-(-1)^{\partial 5} n\left(\bigcap_{k\in@5} A_k\right)-(-1)^{\partial 9} n\left(\bigcap_{k\in@9} A_k\right)-(-1)^{\partial 6} n\left(\bigcap_{k\in@6} A_k\right)$$

$$-(-1)^{\partial 10} n\left(\bigcap_{k\in@10} A_k\right)-(-1)^{\partial 12} n\left(\bigcap_{k\in@12} A_k\right)-(-1)^{\partial 7} n\left(\bigcap_{k\in@7} A_k\right)-(-1)^{\partial 11} n\left(\bigcap_{k\in@11} A_k\right)$$

$$-(-1)^{\partial 14} n\left(\bigcap_{k\in@14} A_k\right)-(-1)^{\partial 13} n\left(\bigcap_{k\in@13} A_k\right)-(-1)^{\partial 15} n\left(\bigcap_{k\in@15} A_k\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{15}(-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k\in@i} A_k\right)=\sum_{i=1}^{15}(-1)^{\partial i-1} n\left(\bigcap_{k\in@i} A_k\right)$$

別解

$$n(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=n(A_1\cup A_2\cup A_3)+n(A_4)-n((A_1\cup A_2\cup A_3)\cap A_4)$$

$$= n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) + n(A_4) - n((A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4))$$

$$= -\sum_{i=1}^{7} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @i} A_k\right) + n(A_4) + \sum_{i=1}^{7} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @i} (A_k \cap A_4)\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{7} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @i} A_k\right) + n(A_4) + \sum_{i=1}^{7} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @(i+2^{4-1})} A_k\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{7} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @i} A_k\right) - (-1)^{\partial 8} n\left(\bigcap_{k \in @8} A_k\right) - \sum_{i=9}^{15} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @i} A_k\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{15} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @i} A_k\right) = \sum_{i=1}^{15} (-1)^{\partial i - 1} n\left(\bigcap_{k \in @i} A_k\right)$$

定理

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = -\sum_{i=1}^{2^m - 1} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @i} A_k\right)$$

証明）数学的帰納法による。

$m = 1$のとき

左辺＝$n(A_1)$

右辺=

$$-\sum_{i=1}^{2^1 - 1} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @i} A_k\right) = -(-1)^{\partial 1} n\left(\bigcap_{k \in @1} A_k\right) = -(-1)^1 n\left(\bigcap_{k \in \{1\}} A_k\right) = n(A_1)$$

m のとき正しいと仮定して m +1 のとき

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{m+1}) = n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \cup A_{m+1})$$

$$= n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) + n(A_{m+1}) - n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \cap A_{m+1})$$

$$= n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) + n(A_{m+1}) - n((A_1 \cap A_{m+1}) \cup (A_2 \cap A_{m+1}) \cup \cdots \cup A_m \cap A_{m+1}))$$

$$= -\sum_{i=1}^{2^m - 1} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @i} A_k\right) + n(A_{m+1}) + \sum_{i=1}^{2^m - 1} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @i} (A_k \cap A_{m+1})\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{2^m - 1} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @i} A_k\right) + n(A_{m+1}) + \sum_{i=1}^{2^m - 1} (-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k \in @(i+2^m)} A_k)\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{2^m-1}(-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k\in @i} A_k\right) - (-1)^{\partial 2^m} n\left(\bigcap_{k\in @2^m} A_k\right) - \sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}-1}(-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k\in @i} A_k\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{2^{m+1}-1}(-1)^{\partial i} n\left(\bigcap_{k\in @i} A_k\right)$$

従って証明された。

Ⅳ　面積の公式

平面または曲面面上の図形Aの面積を$s(A)$とあらわす。

２つの図形をA, Bとするとき

$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

に準じて

$s(A\cup B) = s(A) + s(B) - s(A\cap B)$

が成り立つ。

一般に次の定理が成り立つ。

定理

$$s(A_1\cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = -\sum_{i=1}^{2^m-1}(-1)^{\partial i} s\left(\bigcap_{k\in @i} A_k\right)$$