直線と距離

１． 直線$ax+by+c=0$と原点Oとの距離

直線$ax+by+c=0$と直線$bx-ay=0$との交点座標Qは

$$Q\left(\frac{-ac}{a^2+b^2},\frac{-bc}{a^2+b^2}\right)$$

$$OQ=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

２． 直線$ax+by+c=0$と点$P(x_0,y_0)$との距離

座標変換$X=x-x_0$、$Y=y-y_0$によって

直線$a(X+x_0)+b(Y+y_0)+c=0$と原点Oとの距離と同等であるから交点座標Qは

$$Q\left(\frac{-a(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2},\frac{-b(ax_0+by_0+c)}{a^2+b^2}\right)$$

$$OQ=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

３． ２点(x_1,y_1),(x_2,y_2)を通る直線と原点Oとの距離

２点(x_1,y_1),(x_2,y_2)を通る直線は$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 \\ x_1-x_2 & y_1-y_2 \end{vmatrix}=0$から

$(y_1-y_2)(x-x_2)-(x_1-x_2)(y-y_2)=0$

$(y_1-y_2)x-(y_1-y_2)x_2-(x_1-x_2)y+(x_1-x_2)y_2=0$

直線$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+x_1y_2-y_1x_2=0$と原点Oとの距離と同等であるから交点座標Qは

$$Q\left(\frac{-(y_1-y_2)(x_1y_2-y_1x_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},\frac{(x_1-x_2)(x_1y_2-y_1x_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right)$$

$$OQ=\frac{|x_1y_2-y_1x_2|}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$$

４． ２点(x_1,y_1),(x_2,y_2)を通る直線と点$P(x_0,y_0)$との距離

座標変換$X=x-x_0$、$Y=y-y_0$によって

$(y_1-y_2)(X+x_0)-(x_1-x_2)(Y+y_0)+x_1y_2-y_1x_2=0$

すなわち

$(y_1-y_2)X+(y_1-y_2)x_0-(x_1-x_2)Y-(x_1-x_2)y_0+x_1y_2-y_1x_2=0$

$(y_1-y_2)X-(x_1-x_2)Y+(y_1-y_2)(x_0-x_2)-(x_1-x_2)(y_0-y_2)=0$

と原点Oとの距離と同等であるから交点座標QはXY系で

$$Q\left(\frac{-(y_1-y_2)((y_1-y_2)(x_0-x_2)-(x_1-x_2)(y_0-y_2))}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},\frac{(x_1-x_2)((y_1-y_2)(x_0-x_2)-(x_1-x_2)(y_0-y_2))}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right)$$

$$\mathrm{OQ} = \frac{|(y_1 - y_2)(x_0 - x_2) - (x_1 - x_2)(y_0 - y_2)|}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

交点座標Qはｘｙ系で

$$\mathrm{Q}\left(\frac{-(y_1 - y_2)((y_1 - y_2)(x_0 - x_2) - (x_1 - x_2)(y_0 - y_2))}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + x_0, \frac{(x_1 - x_2)((y_1 - y_2)(x_0 - x_2) - (x_1 - x_2)(y_0 - y_2))}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + y_0\right)$$