建物の像

Ⅰ　天球面の大円上の点

１．直線$x = at, y = bt, y = ct$　と球面$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$との交点の座標

$$(at)^2 + (bt)^2 + (ct)^2 = r^2$$

$$t^2 = \frac{r^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$t = \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\left(\frac{ar}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{br}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{cr}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$$

２．原点と(x_1, y_1, z_1)を通る直線と球面$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$との交点の座標

$x = x_1 t, y = y_1 t, y = z_1 t$と球面$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$との交点の座標

$$\left(\frac{x_1 r}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}}, \frac{y_1 r}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}}, \frac{z_1 r}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}}\right)$$

３．視点$P(x_0, y_0, z_0)$と点$A_1(x_1, y_1, z_1)$を通る直線ｌと

天球$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 1$との交点$B_1$の座標を求める。

座標変換　$X = x - x_0$, $Y = y - y_0$　, $Z = z - z_0$　によって

原点と点$(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$を通る直線と単位天球$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$との交点の座標を求める。

$$\left(\frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}, \frac{y_1 - y_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}\right.$$
$$\left.\frac{z_1 - z_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}\right)$$

座標変換　$X = x - x_0$, $Y = y - y_0$　, $Z = z - z_0$　で x,y,z 系に戻すと

$$\left(\frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} + x_0, \frac{y_1 - y_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}}\right.$$
$$\left. + y_0, \frac{z_1 - z_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}} + z_0\right)$$

原点と点$(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$を通る直線と単位円$X^2 + Y^2 = 1$との交点の座標を求める。

$$\left(\frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}, \frac{y_1 - y_0}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}\right)$$

座標変換　$X = x - x_0$, $Y = y - y_0$　　で x,y,系に戻すと

$$\left(\frac{x_1-x_0}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}}+x_0,\frac{y_1-y_0}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}}+y_0\right)=(Dx_1,Dy_1)$$
$$\left(\frac{x_2-x_0}{\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2}}+x_0,\frac{y_2-y_0}{\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y_2-y_0)^2}}+y_0\right)=(Dx_2,Dy_2)$$

４. 視点$P(x_0,y_0,z_0)$と点$A_1(x_1,y_1,z_1)$を通る直線と天球$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=1$との交点を$B_1(Tx_1,Ty_1,Tz_1)$ ，視点$P(x_0,y_0,z_0)$と点$A_2(x_2,y_2,z_2)$を通る直線と天球$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=1$ との交点を$B_2(Tx_2,Ty_2,Tz_2)$とする。
球面上の２点$B_1(Tx_1,Ty_1,Tz_1)$ ，$B_2(Tx_2,Ty_2,Tz_2)$を通る大円をＫとする。大円Ｋと xy 座標平面である、水平面との交線をＬとする。
イ）大円ＫにおいてＬの方向は
点A_1の真下の点を $A_1{}'=(x_1,y_1,0)$,点A_2の真下の点を $A_2{}'=(x_2,y_2,0)$とするとき$\overrightarrow{A_1A_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,0)$の方向余弦は

$$\left(\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}},\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}},0\right)$$

である。
$\overrightarrow{PA_1}=(x_1-x_0,y_1-y_0,0)$,$\overrightarrow{PA_2}=(x_2-x_0,y_2-y_0,0)$
の外積の z 要素$(x_1-x_0)(y_2-y_0)-(x_2-x_0)(y_1-y_0)<0$
が成り立つと、建物に向かって$\overrightarrow{A_1A_2}$は右に向いている。このようにA_1,A_2を選ぶことが可能である。

ロ）大円Ｋの点$B_1(Tx_1,Ty_1,Tz_1)$から直線Ｌに下ろした垂線の足をC_1とする。
大円Ｋ面に於いて$\overrightarrow{PB_1}=(Tx_1-x_0,Ty_1-y_0,Tz_1-z_0)$の Ｌ 方向に対する角を$\alpha_1=\angle B_1PC_1$とすると$\overrightarrow{PB_1}=(Tx_1-x_0,Ty_1-y_0,Tz_1-z_0)$のＬ方向の成分$PC_1$は

$$\cos\alpha_1=PC_1=\frac{(Tx_1-x_0)(x_2-x_1)+(Ty_1-y_0)(y_2-y_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=(Tx_1-x_0)\cos\varphi+(Ty_1-y_0)\sin\varphi$$

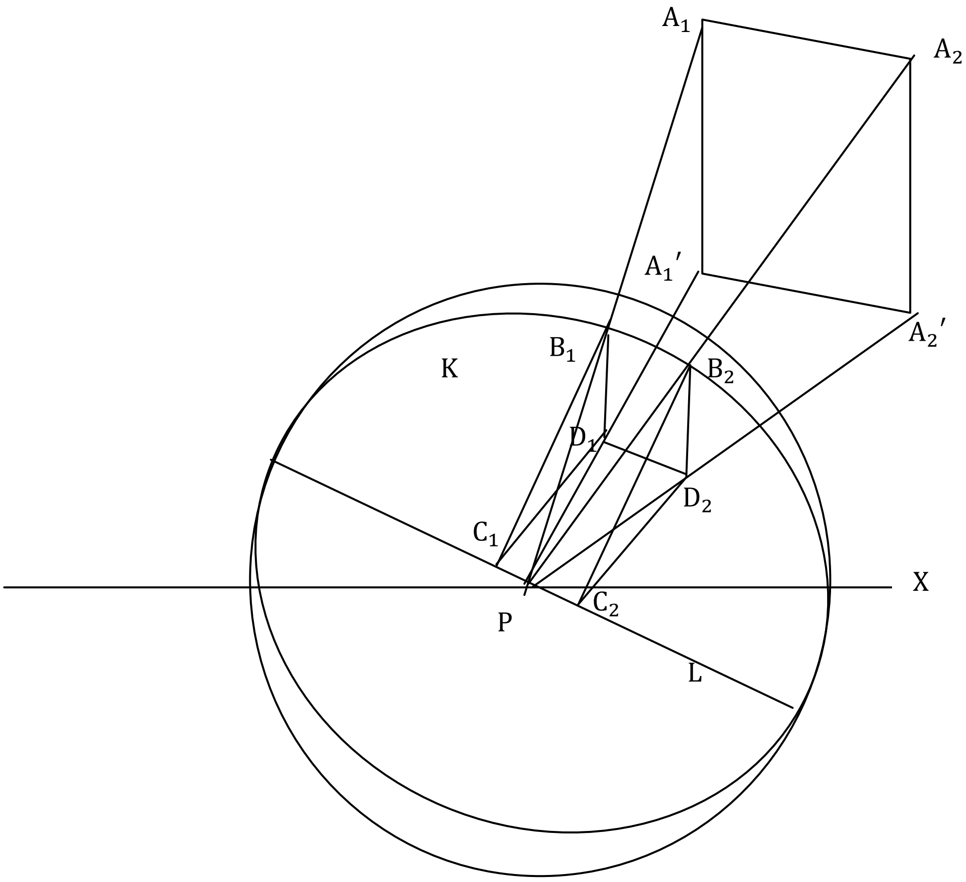
大円Ｋ面において、これに垂直方向の成分B_1C_1は

$$\sin\alpha_1=B_1C_1{}^2=PB_1{}^2-PC^2=1-\frac{\{(Tx_1-x_0)(x_2-x_1)+(Ty_1-y_0)(y_2-y_1)\}^2}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\therefore B_1C_1=\sqrt{1-\frac{\{(Tx_1-x_0)(x_2-x_1)+(Ty_1-y_0)(y_2-y_1)\}^2}{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$=\sqrt{1-\{(Tx_1-x_0)\cos\varphi+(Ty_1-y_0)\sin\varphi\}^2}$$

に等しい。



// kakuP1:PD1 の x 軸正方向からの角

// kakuP2:PD2 の x 軸正方向からの角

// kaku:直線Ｌの x 軸正方向からの角

// kaku1:PB1 の L 正方向からの角

// kaku2:PB2 の L 正方向からの角

同様に大円Ｋに於いて$\overrightarrow{PB_2}=(Tx_2-x_0, Ty_2-y_0, Tz_2-z_0)$の水平方向 L に対する角を α_2＝$\angle B_2PC_2$とすると$\overrightarrow{PB_2}=(Tx_2-x_0, Ty_2-y_0, Tz_2-z_0)$ のＬ方向の成分PC_2は

$$\cos\alpha_2 = PC_2 = \frac{(Tx_2-x_0)(x_2-x_1)+(Ty_2-y_0)(y_2-y_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}} = (Tx_2-x_0)\cos\varphi + (Ty_2-y_0)\sin\varphi$$

$$\sin\alpha_2 = B_2C_2{}^2 = \sqrt{1-\frac{(Tx_2-x_0)(x_2-x_1)+(Ty_2-y_0)(y_2-y_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}}$$

$$= \sqrt{1-\{(Tx_2-x_0)\cos\varphi + (Ty_2-y_0)\sin\varphi\}^2}$$

である。

ロ）大円Ｋの点$B_1(Tx_1, Ty_1, Tz_1)$から水平面に下ろした垂線の足をD_1とする。三角形$B_1C_1D_1$は$\angle B_1D_1C_1$を直角とする直角三角形である。

$B_1D_1 = Tz_1 - z_0$

$B_1C_1 = \sqrt{1 - \{(Tx_1 - x_0)\cos\varphi + (Ty_1 - y_0)\sin\varphi\}^2}$

であるから

$$
\begin{aligned}
{C_1D_1}^2 &= {B_1C_1}^2 - {B_1D_1}^2 = 1 - \{(Tx_1 - x_0)\cos\varphi + (Ty_1 - y_0)\sin\varphi\}^2 - (Tz_1 - z_0)^2 \\
&= (Tx_1 - x_0)^2 + (Ty_1 - y_0)^2 - \{(Tx_1 - x_0)\cos\varphi + (Ty_1 - y_0)\sin\varphi\}^2 \\
&= (Tx_1 - x_0)^2 + (Ty_1 - y_0)^2 - (Tx_1 - x_0)^2\cos^2\varphi - 2(Tx_1 - x_0)\cos\varphi(Ty_1 - y_0)\sin\varphi \\
&\quad - (Ty_1 - y_0)^2\sin^2\varphi \\
&= (Tx_1 - x_0)^2(1 - \cos^2\varphi) + (Ty_1 - y_0)^2(1 - \sin^2\varphi) \\
&\quad - 2(Tx_1 - x_0)\cos\varphi(Ty_1 - y_0)\sin\varphi = \{(Tx_1 - x_0)\sin\varphi - (Ty_1 - y_0)\cos\varphi\}^2
\end{aligned}
$$

$\therefore C_1D_1 = |(Tx_1 - x_0)\sin\varphi - (Ty_1 - y_0)\cos\varphi|$

ハ）大円Ｋの水平方向に対する角をθとすると大円Ｋの水平面への投影による短縮率kは

$$k = \cos\theta = \frac{C_1D_1}{B_1C_1} = \frac{|(Tx_1 - x_0)\sin\varphi - (Ty_1 - y_0)\cos\varphi|}{\sqrt{1 - \{(Tx_1 - x_0)\cos\varphi + (Ty_1 - y_0)\sin\varphi\}^2}}$$

ハ）大円Ｋを水平面に倒した状態を想定すると$B_1(Tx_1, Ty_1, Tz_1)$の位置のx軸方向に対する角は直線Ｌのx軸方向に対する角φと直線Ｌに対するB_1の角α_1によって$\alpha_1 - \varphi$で表わされる。

ニ）$B_2(Tx_2, Ty_2, Tz_2)$の位置のx軸方向に対する角は直線Ｌのx軸方向に対する角φと直線Ｌに対するB_2の角α_2によって$\alpha_2 - \varphi$で表わされる。

$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$k = \frac{|(Tx_1 - x_0)\sin\varphi - (Ty_1 - y_0)\cos\varphi|}{\sqrt{1 - \{(Tx_1 - x_0)\cos\varphi + (Ty_1 - y_0)\sin\varphi\}^2}}$$

Ⅱ天球面上の大円の水平面への射影

１．直線　$ax + by + c = 0$ と原点から垂直な直線との交点Ｐの座標を求める。

原点を通る垂直な直線は$bx - ay = 0$である。

$a(ax + by + c) = 0$

$a^2x + aby + ac = 0$

$a^2x + b^2x + ac = 0$

$$x = \frac{-ac}{a^2 + b^2}$$

$$y = \frac{-bc}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore P\left(\frac{-ac}{a^2 + b^2}, \frac{-bc}{a^2 + b^2}\right)$$

２．直線　$ax + by + c = 0$ と点(x_0, y_0)から垂直な直線との交点Ｐの座標を求める。

座標変換　$X = x - x_0$, $Y = y - y_0$　によって

$a(X + x_0) + b(Y + y_0) + c = 0$と原点から垂直な直線との交点 Q の座標を求めることに相当するから、

$aX + bY + ax_0 + by_0 + c = 0$と原点から垂直な直線との交点 Q の座標を求めることに相当するから、

$$\therefore Q\left(\frac{-a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}, \frac{-b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}\right)$$

従って座標変換　$X = x - x_0$, $Y = y - y_0$　によって元の座標系で表わすと

$$x = X + x_0 = \frac{-a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} + x_0 = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}$$

$$y = Y + y_0 = \frac{-b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} + y_0 = \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore P\left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2}\right)$$

３．２点$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$を通る直線と点(x_0, y_0)から垂直な直線との交点Ｐの座標を求める。

２点$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$を通る直線は

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$

$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - y_1x_2 + y_2x_1 = 0$

$$x = \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2} = \frac{(x_2 - x_1)^2x_0 + (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)y_0 + (y_2 - y_1)(y_1x_2 - y_2x_1)}{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$y = \frac{-abx_0 + a^2y_0 - bc}{a^2 + b^2} = \frac{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)^2y_0 + (x_2 - x_1)(y_1x_2 - y_2x_1)}{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$\therefore P\left(\frac{(x_2 - x_1)^2x_0 + (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)y_0 + (y_2 - y_1)(y_1x_2 - y_2x_1)}{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2},\right.$$

$$\left.\frac{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)^2y_0 + (x_2 - x_1)(y_1x_2 - y_2x_1)}{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}\right)$$

４． xy 平面で直交するベクトルv_1, v_2によって任意の点 P(x,y)が

$$\overrightarrow{OP} = av_1 + bv_2$$

であるとき、

変換　$u_1 = v_1,\ u_2 = kv_2$

によって P は

$$\overrightarrow{OQ} = au_1 + bu_2$$

で表わされる点$Q(x', y')$に移る。

このときx', y'を x,y で表わせ。

但し$v_1 = (e_1, f_1), v_2 = (e_2, f_2)$

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ kf_1 & f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}} x + \frac{e_1 e_2 (k-1)}{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}} y$$

$$y' = -\frac{f_1 f_2 (k-1)}{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}} x + \frac{\begin{vmatrix} ke_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}} y$$

e2=-f1,f2=e1 ならば

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ kf_1 & f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}} x + \frac{e_1 e_2 (k-1)}{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}} y = \frac{\begin{vmatrix} e_1 & -f_1 \\ kf_1 & e_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & -f_1 \\ f_1 & e_1 \end{vmatrix}} x + \frac{e_1(-f_1)(k-1)}{\begin{vmatrix} e_1 & -f_1 \\ f_1 & e_1 \end{vmatrix}} y$$

$$= \frac{{e_1}^2 + k{f_1}^2}{{e_1}^2 + {f_1}^2} x + \frac{(1-k)e_1 f_1}{{e_1}^2 + {f_1}^2} y$$

$$y' = -\frac{f_1 f_2 (k-1)}{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}} x + \frac{\begin{vmatrix} ke_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{vmatrix}} y = -\frac{f_1 e_1 (k-1)}{\begin{vmatrix} e_1 & -f_1 \\ f_1 & e_1 \end{vmatrix}} x + \frac{\begin{vmatrix} ke_1 & -f_1 \\ f_1 & e_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e_1 & -f_1 \\ f_1 & e_1 \end{vmatrix}} y$$

$$= \frac{(1-k)e_1 f_1}{{e_1}^2 + {f_1}^2} x + \frac{k{e_1}^2 + {f_1}^2}{{e_1}^2 + {f_1}^2} y$$

$e_1 = x2 - x1 \quad f_1 = y2 - y1$

$$A11 = \frac{{e_1}^2 + k{f_1}^2}{{e_1}^2 + {f_1}^2} = \frac{(x2-x1)^2 + k * (y2-y1)^2}{(x2-x1)^2 + (y2-y1)^2}$$

$$A12 = \frac{(1-k)e_1 f_1}{{e_1}^2 + {f_1}^2} = \frac{(x2-x1) * (y2-y1) * (1-k)}{(x2-x1)^2 + (y2-y1)^2}$$

$$A21 = \frac{(1-k)e_1 f_1}{{e_1}^2 + {f_1}^2} = \frac{(x2-x1) * (y2-y1) * (1-k)}{(x2-x1)^2 + (y2-y1)^2}$$

$$A22=\frac{ke_1{}^2+f_1{}^2}{e_1{}^2+f_1{}^2}=\frac{k(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}$$

$$e_1＝\cos\varphi=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

$$f_1=\sin\varphi=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

を用いると

$$A11=\frac{e_1{}^2+ke_2{}^2}{e_1{}^2+e_2{}^2}=\frac{(x2-x1)^2+k*(y2-y1)^2}{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}=\cos^2\varphi+k\sin^2\varphi$$

$$A12=-\frac{(1-k)e_1e_2}{e_1{}^2+e_2{}^2}=-\frac{(x2-x1)*(y2-y1)*(1-k)}{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}=(1-k)\cos\varphi\sin\varphi$$

$$A21=\frac{(1-k)e_1e_2}{e_1{}^2+e_2{}^2}=\frac{(x2-x1)*(y2-y1)*(1-k)}{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}=(1-k)\cos\varphi\sin\varphi$$

$$A22=\frac{ke_1{}^2+e_2{}^2}{e_1{}^2+e_2{}^2}=\frac{k(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}=k\cos^2\varphi+\sin^2\varphi$$

$$k=\frac{|(Tx_1-x_0)\sin\varphi-(Ty_1-y_0)\cos\varphi|}{\sqrt{1-\{(Tx_1-x_0)\cos\varphi+(Ty_1-y_0)\sin\varphi\}^2}}$$

座標変換

キャンバスの座標$(x0,y0)$をキャンバスの中央(r,r)に原点を移動

$$\begin{cases} x1=x0-r \\ y1=-y0+r \end{cases}$$

１次変換

$$\begin{cases} x2=a11x1+a12y1 \\ y2=a21x1+a22y1 \end{cases}$$

キャンバスの中央(r,r)に原点の座標をキャンバスの座標に戻す。

$$\begin{cases} x3=x2+r \\ y3=-y2+r \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x3=x2+r=a11x1+a12y1+r&=a11(x0-r)+a12(-y0+r)+r \\ &=a11x0-a12y0-r(a11-a12-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y3=-y2+r=-a21x1-a22y1+r&=-a21(x0-r)-a22(-y0+r)+r \\ &=-a21x0+a22y0+r(a21-a22+1) \end{aligned}$$

従って

$$\begin{cases} x3 = a11x0 - a12y0 - r(a11 - a12 - 1) \\ y3 = -a21x0 + a22y0 + r(a21 - a22 + 1) \end{cases}$$